线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

正交变换在标准正交基下的矩阵

$$\text{正交变换 } \mathscr{A} \xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基}} \text{正交矩阵 } A$$

定义 (第一类变换, 第二类变换)

设 A 为正交矩阵. 则 $A^TA = I$. 因此 $\det(A) = \pm 1$.

1. 若 $\det(A) = 1$, 则称 $\mathscr{A}$ 为第一类变换;
2. 若 $\det(A) = -1$, 则称 $\mathscr{A}$ 为第二类变换.

性质

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的正交变换.

1. 则 $\mathscr{A}$ 的特征值模长都为 1. 特别地, 实特征值只可能为 ± 1.
2. 若 V 的维数为奇数且 $\mathscr{A}$ 为第一类正交变换, 则 1 为 $\mathscr{A}$ 的特征值.

推论

三维空间中的第一类正交变换保持一个向量不变, 从而一定为旋转变换.

定理

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A. 则

1. 存在唯一的 V 上的线性变换, 记为 $\mathscr{A}^*$, 满足
$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}^*\beta), \quad (\forall \alpha, \beta \in V).$$
2. 线性变换 $\mathscr{A}^*$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A^T.

称 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的伴随变换.

性质

1. $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;
2. $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;
3. $(\lambda\mathscr{A})^* = \lambda\mathscr{A}^*$;
4. $(\mathscr{A} \circ \mathscr{B})^* = \mathscr{B}^* \circ \mathscr{A}^*$;
5. 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间上的线性变换. 则
$$\mathscr{A} \text{ 正交} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}^* \text{ 正交}.$$

对称变换与对称矩阵

定义 (对称变换, 自伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的对称变换(或自伴随变换).

性质

实对称矩阵的特征值都为实数.

定理

设 A 为某欧氏空间上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵. 则

$$\mathscr{A} \text{ 为对称变换} \Leftrightarrow A \text{ 为实对称矩阵}.$$

定理

对称变换的不同特征值对应的特征向量正交.

推论

实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量正交.

定理

任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在 n 阶正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

证明思路: 将一个单位特征向量扩充为一组标准正交基, 并得正交阵 T_n.

则 $T_n^{-1}AT_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$, 其中 A_{n-1} 仍然为实对称. 归纳即可得证.

例

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

提示:$P_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2$.

欧氏空间的子空间 *

定义 (正交)

设 V_1, V_2 为欧氏空间 V 的两子空间. 若对任意 $a_1 \in V_1, a_2 \in V_2$ 都有 $(a_1, a_2) = 0$, 则称 V_1 和 V_2 相互正交, 记为 $V_1 \perp V_2$. 若一个向量 a 满足 $\langle a \rangle \perp V_1$, 则称 a 与 V_1 正交, 记为 $a \perp V_1$.

定理

1. 若 $V_1 \perp V_2$, 则 $V_1 + V_2$ 为直和;
2. 若 $V_1, V_2, \cdots, V_r$ 两两正交, 则 $V_1 + V_2 + \cdots + V_r$ 为直和.

定义 (正交补)

若 $V_1 \perp V_2$ 且 $V = V_1 + V_2$, 则称 V_1, V_2 互为正交补 (空间).

定理

欧氏空间的任意子空间的正交补存在且唯一.